



مبرهنة

ليكن  $f$  تطبيقاً  $\gamma : x \longrightarrow y$  ، مجموعة جزئية  $A$  من  $x$  ،

من  $x$  و  $A \subseteq x$  ،  $x' \subseteq x$  ،

إذا سمان النقطة  $x_0$  للصقة المجموعة  $A$  ، مستمرة في  $x_0$  فإن النقطة  $f(x_0) = \overline{f(A)}$

البرهان

ليكن  $u$  جواراً سينياً لـ  $f(x_0)$  لا يما ان  $f$  مستمرة في النقطة  $x_0$  وبالتالي حسب

المبرهنة السابقة  $f^{-1}(u)$  جواراً لـ  $x_0$

بما ان  $x_0$  للصقة بـ  $A$  أي جوار لها يتقاطع مع  $A$  وبالتالي

$$f^{-1}(u) \cap A \neq \emptyset$$

وبما ان هذا التقاطع غير خالي فإن  $x$  ينتمي إليه ومنه

$$x \in f^{-1}(u) \cap A \neq \emptyset$$

$$f(x) \in f(f^{-1}(u) \cap A) \subseteq f^{-1}f(u) \cap f(A) \subseteq u \cap f(A)$$

تعريف

نقول عن التطبيق  $f$  أنه مستمر في  $x$  إذا سمان مستمراً في كل نقطة من نقاط  $x$

مبرهنة

ليكن  $f$  تطبيقاً  $\gamma : x \longrightarrow y$  ان القضايا التالية متكافئة

(1)  $f$  مستمرة في  $x$

(2)  $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$  من أجل أي مجموعة  $A$  من  $x$

(3) الصورة العكسية لـ  $f$  لأي مجموعة مغلقة في  $y$  هي المجموعة المغلقة في  $x$

(4) الصورة العكسية لـ  $f$  لأي مجموعة مفتوحة في  $y$  هي مجموعة مفتوحة في  $x$

البرهان

1  $\iff$  2 ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة

2  $\iff$  3 لنكن  $u$  مجموعة مغلقة في  $y$  ،  $u = \overline{f^{-1}(u)}$  وهي صورتها العكسية

$$f(\bar{u}) \subseteq \overline{f(u)} = \overline{f(f^{-1}(u))} \subseteq u = \bar{u}$$

كونها مغلقة وبالتالي لصاقتها تساويها

$$f(\bar{u}) \subseteq u$$

$$\bar{u} \subseteq f^{-1}f(\bar{u}) \subseteq f^{-1}(u) = u$$

3  $\iff$  4 لنأخذ مجموعة مفتوحة سينية في  $y$  ولتكن  $G$  عندها  $G \cap u = \emptyset$  لا مغلقة في  $y$



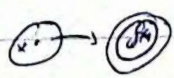


ومب  $\gamma$  :  $f^{-1}(\gamma) \cap f^{-1}(G)$  مغلقة في  $\gamma$

$$= f^{-1}(\gamma) \setminus f^{-1}(G) = X \setminus f^{-1}(G) \Rightarrow f^{-1}(G)$$

وبالتالي فإن  $f^{-1}(G)$  مغلقة في  $X$

$\gamma \in \mathcal{C}$  :  $\gamma$  نقطة كسبية من  $X$  ولتكن  $\gamma$  جواراً كسبياً



$$f(x) \in G \subseteq \gamma$$

لنقطة  $f(x) \in \gamma$

$$x \in f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(\gamma)$$

حب  $f^{-1}(G)$  مفتوحة وبالتالي  $f^{-1}(G)$  جوار  $x$  وبالتالي حسب البرهنة الأولى

فإن الصورة الكلية لأي جوار  $\gamma$  هو جوار  $x$  وبالتالي  $x$  كسبية فإن  $f$  مستمر

جميع النقاط

**ملاحظة :**

إذا كان  $f$  تطبيقاً  $\gamma \rightarrow X$  و  $B$  قاعدة  $\gamma$  فإن  $f$  يكون مستمراً

مع  $x$  إذا وفقط إذا كانت الصورة الكلية لأي عنصر في  $B$  هي

مجموعة مفتوحة في  $X$  **البرهان :** يبرهن بسهولة لأن ترسيب تطبيقين مستمرين هو تطبيق مستمر

**مبرهنة :**

ليكن  $f$  تطبيقاً  $\gamma \rightarrow X$  و  $g$  تطبيقاً  $\gamma \rightarrow Z$

إذا كان تطبيقان  $f$  و  $g$  مستمرين فإن ترسيبهما  $g \circ f : \gamma \rightarrow Z$  مستمر

**البرهان :**

لتكن  $U$  مجموعة مفتوحة في  $Z$  وبما أن  $g$  مستمر فالمجموعة  $g^{-1}(U)$  مفتوحة في  $\gamma$

وبما أن  $f$  مستمر فإن  $f^{-1}(g^{-1}(U))$  مفتوحة في  $X$  ولكن

$$(g \circ f)^{-1}(U) =$$

أي أن الصورة الكلية لأي مجموعة مفتوحة في  $Z$  هي مجموعة مفتوحة

أي تطبيق المركب مستمر

**\* عودة إلى مقارنت الطوبولوجيات :** نفهم أنوى واضف

لفرض أنه لدينا  $\tau_1$  و  $\tau_2$  طوبولوجيتين على  $X$  قلنا سابقاً أن  $\tau_2$  أقوى من  $\tau_1$  إذا

كان  $\tau_1 \subseteq \tau_2$

منطقي لترياً مكافئاً بواسطة استمرار التطبيق

يقول عن الطوبولوجيا  $\tau_2$  أنها أقوى من  $\tau_1$  إذا كان التطبيق المطابق مستمر

$$I : (x, \tau_1) \rightarrow (x, \tau_2)$$





- نفرض  $u \in \tau_2$  و  $\tau_1$  مستمر  $I^{-1}(u) \in \tau_1$   
 لجان تطبيق مطابق فان الصورة العكسية لـ  $u$  في  $u$  ويركن بسهولة  
 نعارض القضايا التالية:

1.  $\tau_1$  أقوى من  $\tau_2$
  2. أي مجموعة مفتوحة في  $\tau_1$  هي مجموعة مفتوحة في  $\tau_2$
  3. أي مجموعة مغلقة في  $\tau_1$  هي مجموعة مغلقة في  $\tau_2$
  4. أي جوار لأي نقطة  $\tau_1$  هو جوار في  $\tau_2$  لهذه النقطة
  5. لصاغة أي مجموعة في  $\tau_1$  كوي لصاغة هذه المجموعة في  $\tau_2$
- سنوضح البند الخامس في مثال:

$$X = \{a, b\} \quad \tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} \quad \tau_2 = \{\emptyset, X\}$$

$$A = \{a\} \quad \text{ولكن}$$

- ما هي لصاغة  $A$  في  $\tau_1$ :

$$A_{\tau_1} = \{a\} = A$$

- ما هي لصاغة  $A$  في  $\tau_2$ :

$$A_{\tau_2} = X$$

ملاحظة:

1. كلما كانت الطوبولوجيا أقوى ازدادت حل المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة والجوارات.
2. كلما كانت الطوبولوجيا أقوى صغرت اللاصقات وسبرت الداخليات.
3. كلما كانت الطوبولوجيا أقوى قلت المجموعات الكثيفة.

ملاحظة:

لتكن  $f$  تطبيقاً مستمراً  $(X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$

إذا استبدلنا الطوبولوجيا  $\tau$  بأخرى أقوى منها  $\tau_1$

يبقى التطبيق مستمراً وذلك الأمر إذا استبدلنا  $\tau'$  بأخرى أضعف منها يبقى  $f$  مستمراً

إذا كانت  $\tau$  الطوبولوجيا القوية (المقطعة)

$\tau'$  الطوبولوجيا الضعيفة (نيرالمقطعة)

في هذه الحالة أي تطبيق بالذات يكون مستمراً



Date :     /     /



Subject: .....

تعريف:

المتناظر المسطح

نضلع على التمثيل  $(x, y) \rightarrow (x', y')$   $f$   $\rightarrow$  تقابل طوبولوجي  
متناظر إذا كان تقابلاً متناظراً وهو معكوسه  
 $f$   $\rightarrow$  تقابل (عكس ومتناظر)

$f$   $\rightarrow$  متناظر

بم: متناظر

\* نقول عن فضائين طوبولوجيتين أنها متناظرتان إذا وجد بينهما هو مورفيزم  
وواحد في العكس

٨٣